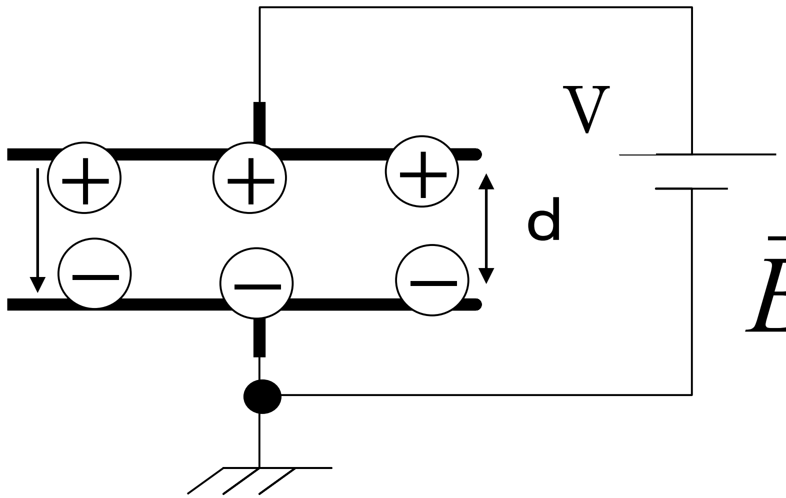
平成30年度 工V系(社会環境工学科) 第6回 電磁気学Ⅰ

天野 浩
amano@nuee.nagoya-u.ac.jp

回	日程	テキスト章	内容
6	11月19日	第3章 誘電体を含む静電界	3.1誘電体と誘電分極 3.2誘電体を含む系の電界 3.3誘電体に蓄えられるエネルギー 3.4誘電体の境界にはたらく力 3.5真空中および誘電体中の基本式のまとめ

前回は、真空中(空気中)の静電容量の基礎を学んだ。今回は誘電体の誘電率を学ぶ。

真空中の場合の平行平板コンデンサ



電位

電界

$$\vec{E} = -\nabla \varphi [V/m]$$

電束密度ベクトル

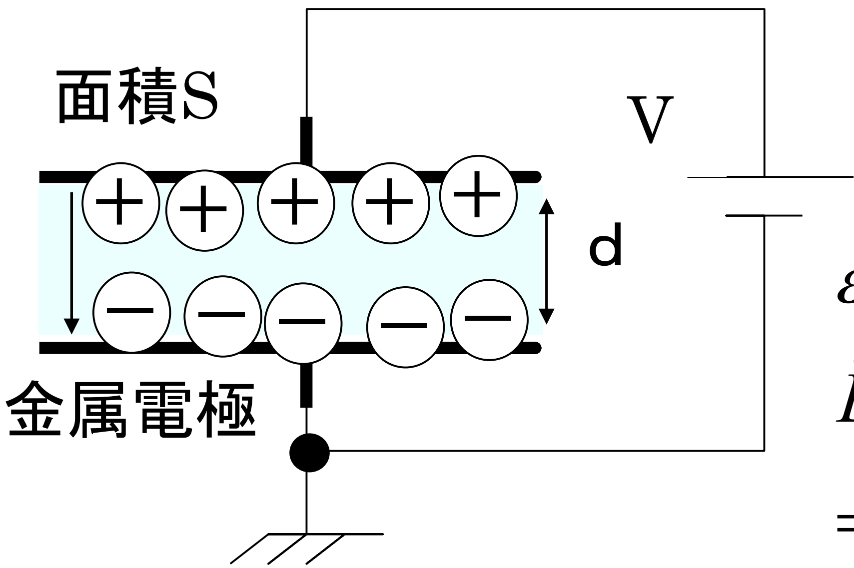
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} [C/m^2]$$

電極の全電荷

Q=C・V=D・S[C]

$$E = \frac{V}{d}, C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

電極間に誘電体を挟んだ時、誘電率がε_0からεに変わったとする。



$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ として、ε_rを比誘電率と呼ぶ。
X線領域以外では、ε_r>1

$$\varepsilon_r = 1 + (\varepsilon_r - 1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \{1 + (\varepsilon_r - 1)\} \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} [C/m^2]$$

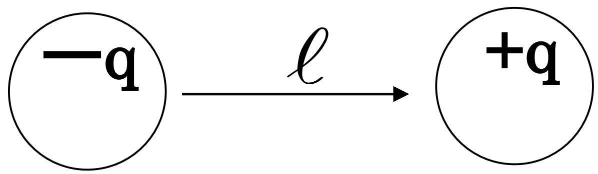
Pを分極ベクトルと呼ぶ。単位は[C/m²]

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} [C/m^2]$$

3.1　誘電体と誘電分極

＊誘電分極とは何か?

→　物質内部で、電気的に中性であったものが、電荷が発生する現象。



$$\vec{P} = \sum_i \vec{m}_i$$

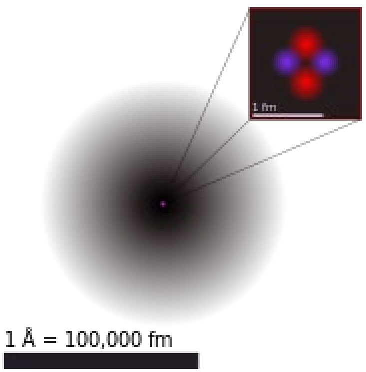
$$\vec{m} = q\vec{\ell}$$

電気双極子

ℓ は微小長さ、　mは電気双極子モーメント

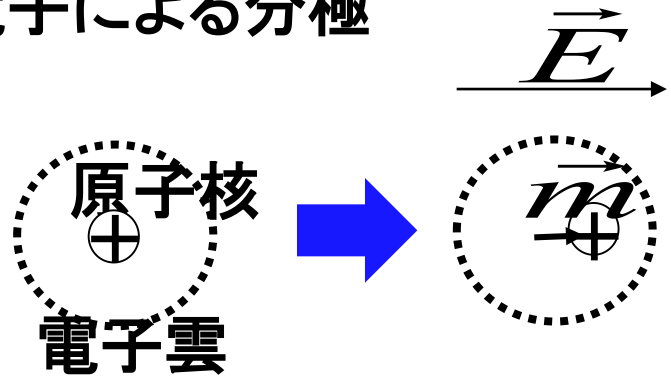
物質内部に発生する電気双極子の総和が**分極**P

誘電分極の種類



Heの原子核と電子雲

1.　電子による分極



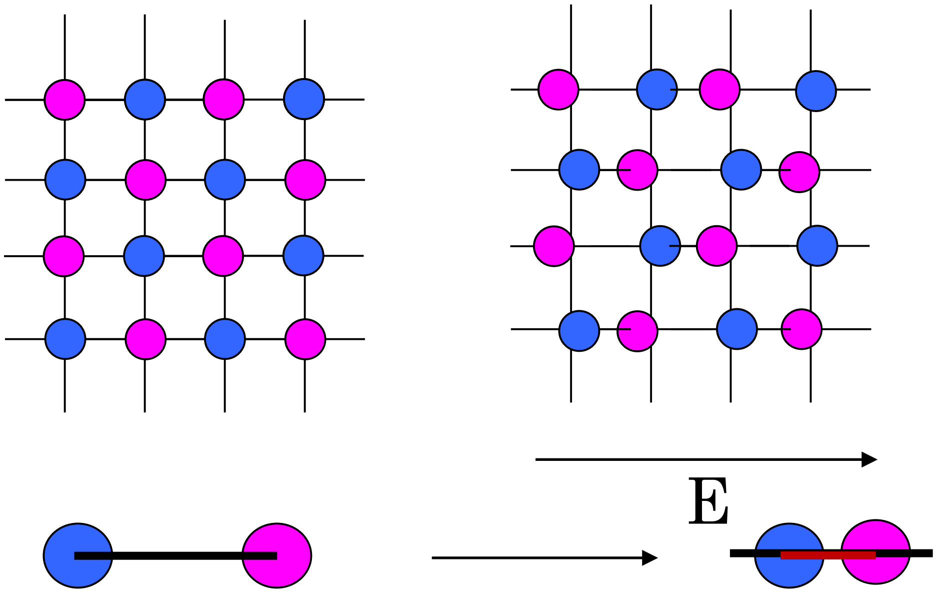
＊各原子における正電荷(原子核)と負電荷(電子)の重心位置のずれにより、電気双極子が発生する。

＊特徴:電子は、原子核に強く束縛されているので、それほど大きくない。

＊電子は軽いので高い周波数の電磁波にも対応する。

2.　イオン分極

NaClのような結晶を考える。 Na:正イオン（青） Cl:負イオン(赤紫)

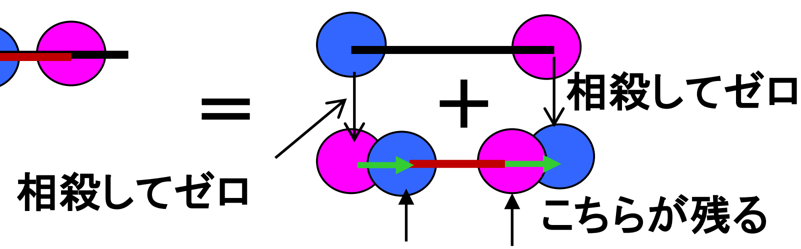


$$\varepsilon_r = 1 + (\varepsilon_r - 1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0\{1 + (\varepsilon_r - 1)\}\vec{E}$$

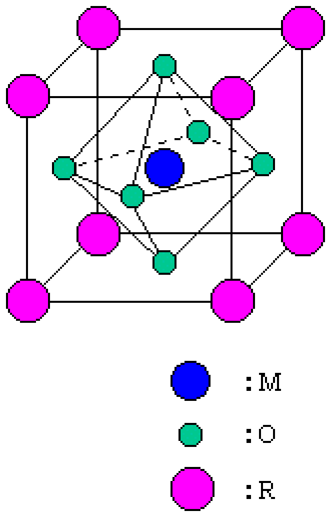
$$= \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}[C/m^2]$$



元の格子＋ずれた格子位置に電気双極子を配置することと同じ。
特徴:格子振動に対応するので、赤外領域まで追随する。

強誘電体材料の例



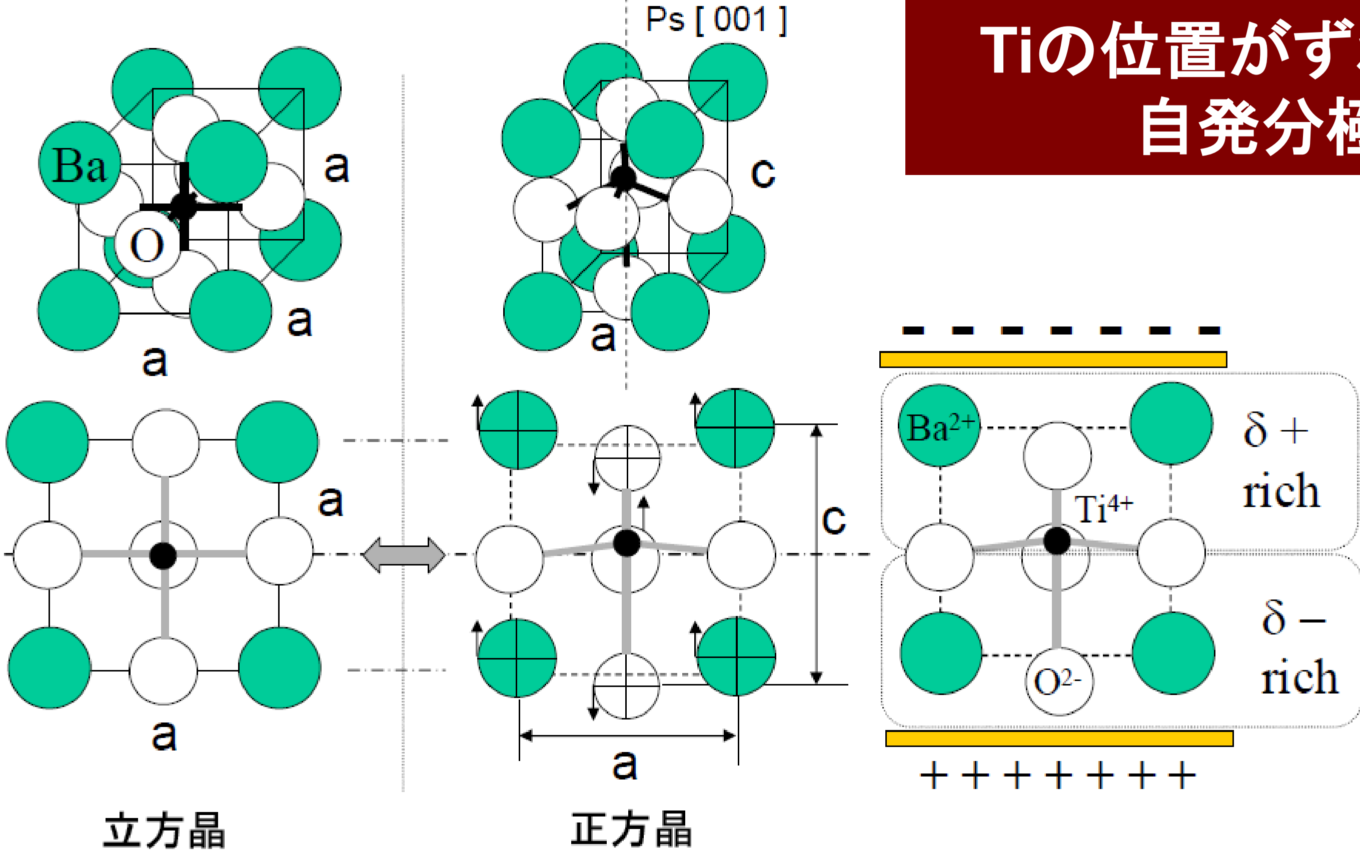
ペロブスカイト構造

例　$BaTiO_3$（チタン酸バリウム）
RMO_3

強誘電体・圧電体理解に関する図集
2007年1月版
楠本慶二著

http://www.geocities.jp/kusumotokeiji/piezofig.pdf#search='PZT%20%20%20%E8%87%AA%E7%99%BA%E5%88%86%E6%A5%B5%20%E5%9C%A7%E9%9B%BB'

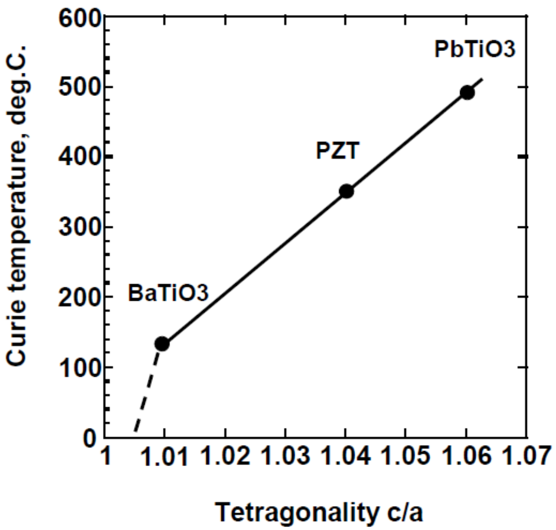
Tiの位置がずれているために自発分極が生じる



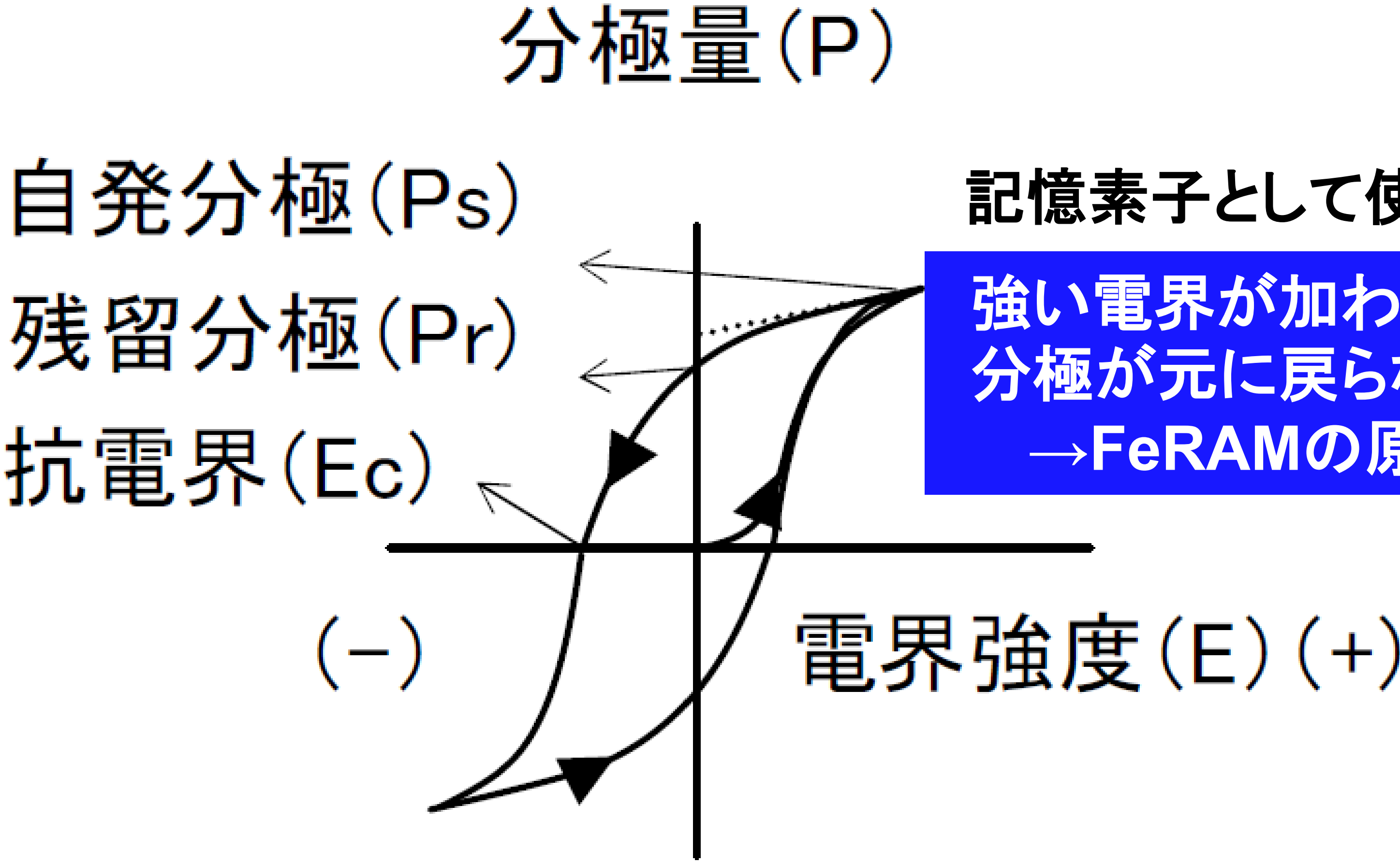
分極なし

分極あり

正方晶と立方晶の相転移温度



強誘電体材料の特徴

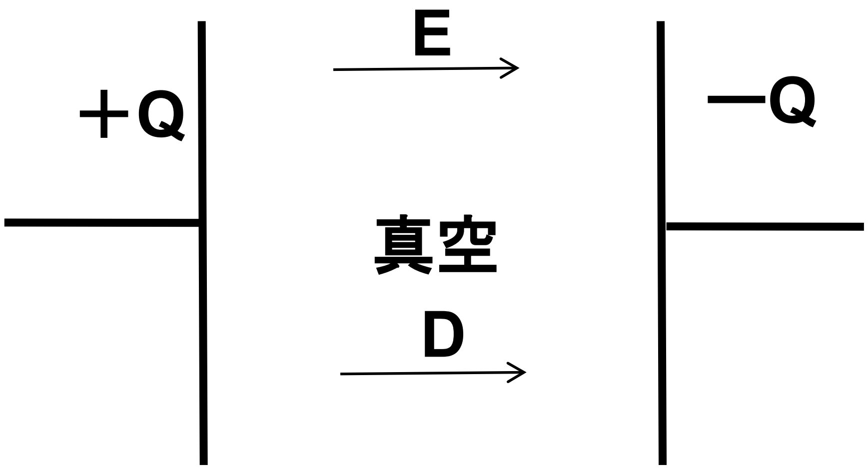


記憶素子として使える

強い電界が加わると、
分極が元に戻らない。
→FeRAMの原理

典型的な強誘電体材料の分極量Pの電界強度E依存性

3.2　誘電体を含む系の電界



真空中の電界ベクトル

$$\vec{E}$$

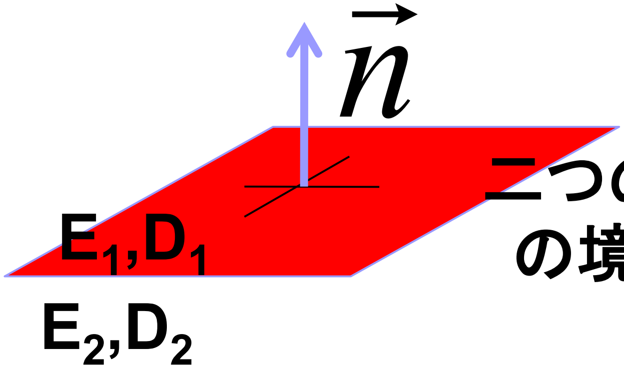
真空中の電束密度ベクトル

$$\vec{D}$$

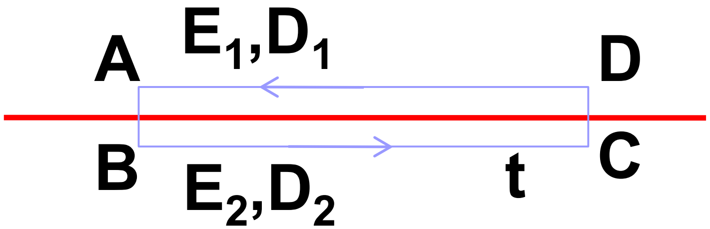
誘電体中の電界ベクトル

誘電体中の電束密度ベクトル

異なる誘電体が接している場合の電界の求め方



二つの媒質の境界面



境界面に垂直に極めて薄い長方形ABCDを考える

電界を周回積分したらゼロのはず $\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

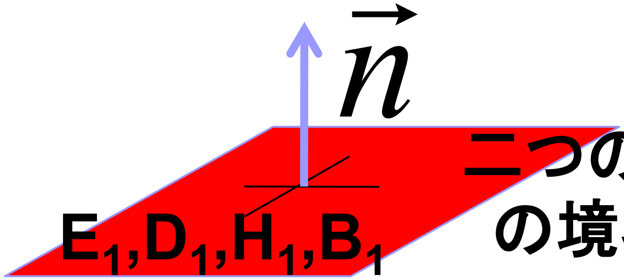
ABCDは極めて薄いので、ABの積分およびCDの積分は無視する。
単位接線ベクトルをtとする。

$$\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = BC \cdot \vec{t} \cdot \vec{E}_2 - DA \cdot \vec{t} \cdot \vec{E}_1 = 0$$

BC=DAなので $\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t}$

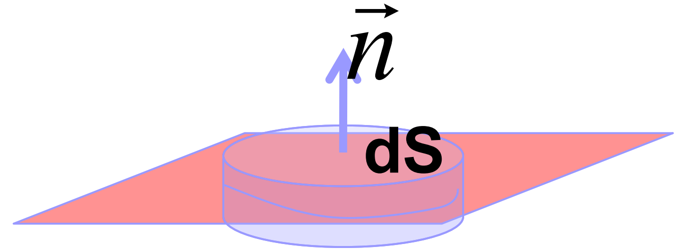
二つの誘電体の界面における電界E_1,E_2の<u>接線</u>成分は等しい。

異なる絶縁体が接している場合の電束密度の求め方



二つの媒質の境界面

E_2, D_2, H_2, B_2



境界面に対して垂直に底面積dSの微小円筒で取り囲む。境界面での面電荷密度をωとする。

ガウスの法則より

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$= \vec{D}_1 \cdot \vec{n} dS - \vec{D}_2 \cdot \vec{n} dS$$

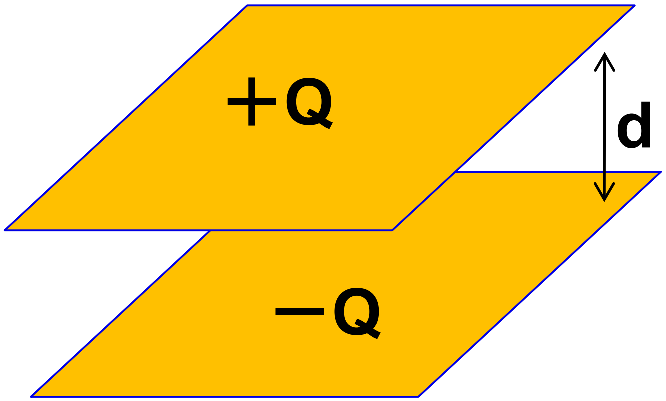
$$= \omega \cdot dS$$

$$\therefore (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = -\omega$$

境界面に電荷がない場合 $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 0$

誘電体境界面上における電束密度D_2,D_1の法線成分は等しい。

Q:真空中に二つの無限平行平板導体があり、それぞれ＋Q[C/m²]、－Q[C/m²]の電荷を 与えて距離d[m]だけ放すと、導体間の静電容量はどれくらいか？



$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon}\Sigma q$$

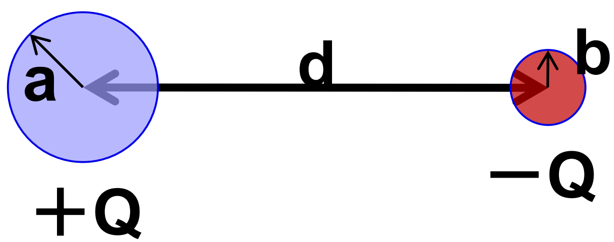
平板間内の電界は、ガウスの法則より

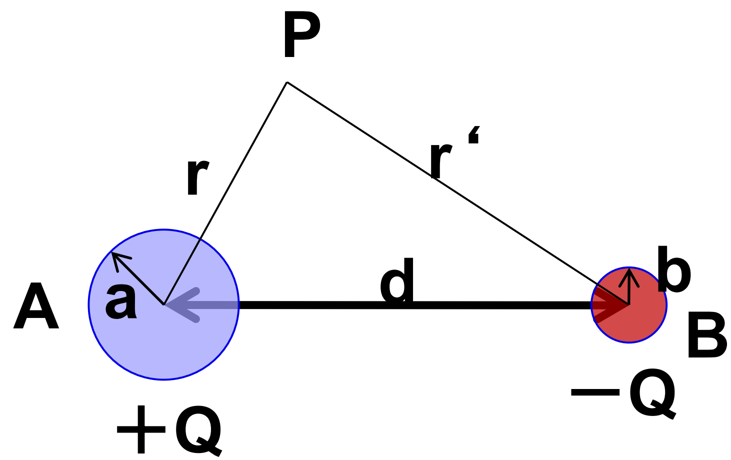
$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$V = -\int_d^0 \frac{Q}{\varepsilon_0}dr = \frac{Q}{\varepsilon_0}d$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{1}{d}[F/m^2]$$

Q　下の図のように球の半径がa[m]およびb[m]の二つの導体球A,Bが間隔d[m]だけ離れて置かれている。それぞれに＋Q[C]、－Q[C]の電荷を与えたとき、静電容量を求めなさい。



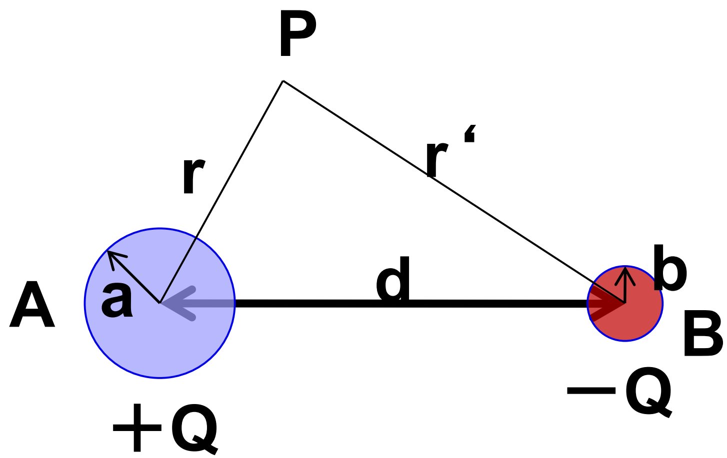


AがPに及ぼす電位、およびBがPに及ぼす電位を考える。

$$V_P = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{\infty}^{r'} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr'$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Q:　下の図のように球の半径がa[m]およびb[m]の二つの導体球A,Bが間隔d[m]だけ離れて置かれている。それぞれに＋Q[C]、－Q[C]の電荷を与えたとき、静電容量を求めなさい。



A表面の電位V_Aは

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{d-a}\right)$$

B表面の電位V_Bは

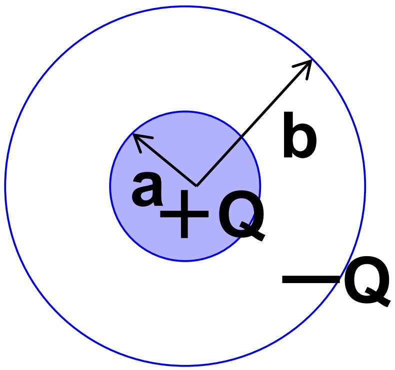
$$V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{d-b}+\frac{1}{b}\right)$$

従って、AとBの電位差V_{AB}は

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{d-a}+\frac{1}{d-b}\right)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V_{AB}} = \left|\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{d-a}+\frac{1}{d-b}\right)}\right| [F]$$

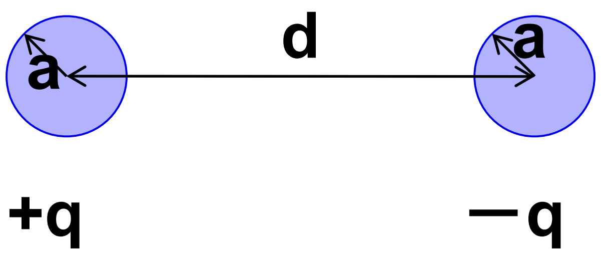
Q： 下の図のように内球の半径がa[m]、外球の半径がb[m]の同心球導体がある。それぞれに＋Q[C]、－Q[C]の電荷を与えたとき、静電容量を求めなさい。



$$V = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)[V]$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}[F]$$

Q： 下の図のように半径a[m]の無限に長い導線2本が間隔d[m]で平行に配置されている。2本の導線それぞれに単位長さ当たり電荷+q[C/m]および－q[C/m]を与えたときの単位長さ当たりの静電容量を求めなさい。



断面図

＋qの方が作る電位

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr$$

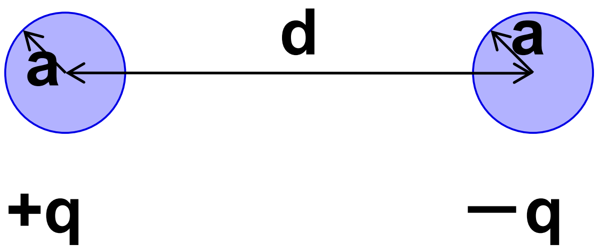
－qの方が作る電位

$$V = \int_{\infty}^{r'} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}dr'$$

従って、合計の電位は

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}log(\frac{r'}{r})[V]$$

Q9-4　下の図のように半径a[m]の無限に長い導線2本が間隔d[m]で平行に配置されている。2本の導線それぞれに単位長さ当たり電荷+q[C/m]および－q[C/m]を与えたときの単位長さ当たりの静電容量を求めなさい。



断面図

+qの方の表面電位

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} log(\frac{d-a}{a})[V]$$

－qの方の表面電位

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} log(\frac{a}{d-a})[V]$$

従って二つの導線間の電位差は

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} log(\frac{d-a}{a})[V]$$

$$\therefore C = \frac{\pi\varepsilon_0}{log(\frac{d-a}{a})}[F/m]$$

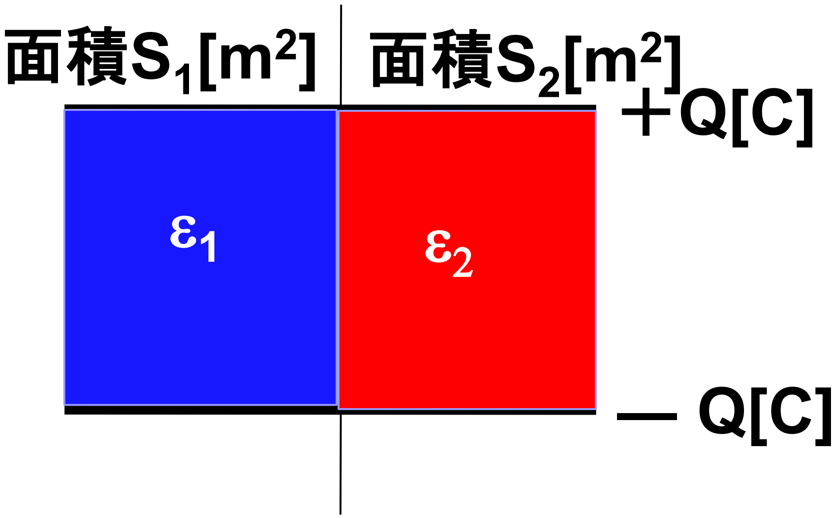
Q: (1)真空中に点電荷q[C]があるとき、距離r[m]離れた点の電束密度ベクトルD[C/m²]を求めなさい。
(2)点電荷の周りを比誘電率ε_rの物質で満たした場合の電束密度ベクトルD [C/m²]を求めなさい。

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$$ ガウスの法則

(1),(2)とも答えは同じ

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} [C/m^2]$$

Q：図のように、誘電率ε_1の材料を面積S_1[m^2]，誘電率ε_2の材料を面積S_2[m^2]，平行平板コンデンサを二種類の誘電体で満たして、極板に電荷+Q[C]、-Q[C]を与えたとき、このコンデンサの誘電率εを求めなさい。

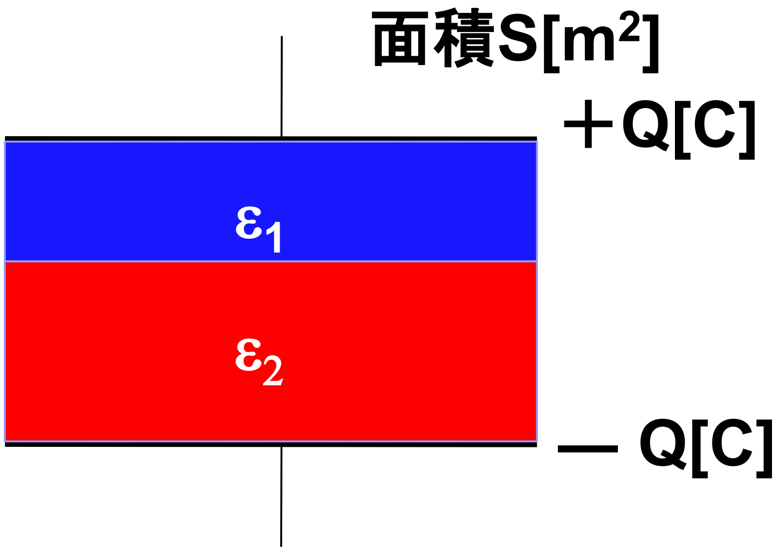


この場合は，
電界Eは材料１と2で等しい。

$$Q=D\times(S_1+S_2)$$
$$=\varepsilon E\times(S_1+S_2)$$
$$=\varepsilon_1 ES_1+\varepsilon_2 ES_2$$

$$\varepsilon=\frac{S_1}{S_1+S_2}\varepsilon_1+\frac{S_2}{S_1+S_2}\varepsilon_2$$

Q： 図のように、面積S[m²]の平行平板コンデンサを誘電率ε_1,ε_2の二種類の誘電体で満たして、極板に電荷+Q[C]、－Q[C]を与えたとき、各誘電体内の電界を求めなさい。



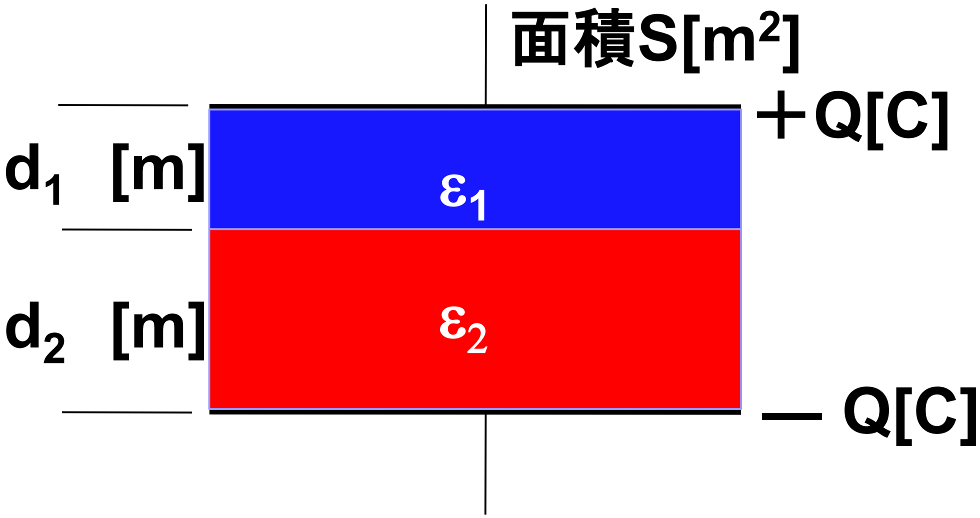
電束密度ベクトルDで考える。

$$D=\varepsilon_1 E_1=\varepsilon_2 E_2=Q/S$$

$$E_1=\frac{Q}{\varepsilon_1\cdot S}[V/m]$$

$$E_2=\frac{Q}{\varepsilon_2\cdot S}[V/m]$$

Q:　前問において、合成の静電容量をC、それぞれの誘電体の厚さをd_1,d_2とする。CをSとd_1,d_2,ε_1,ε_2を用いて表しなさい。



$$V = -\int_{\text{基準位置}}^{\text{対象となる位置}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$D = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = Q/S$$

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_1 \cdot S}[V/m]$$

$$E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_2 \cdot S}[V/m]$$

$$V = -\int_{d_1}^{0} \frac{Q}{\varepsilon_1 S}dx - \int_{d_1+d_2}^{d_1} \frac{Q}{\varepsilon_2 S}dx$$

$$= \frac{Q}{S}\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{Q}{S}\frac{d_2}{\varepsilon_2}$$

$$= \frac{Q}{S}\frac{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

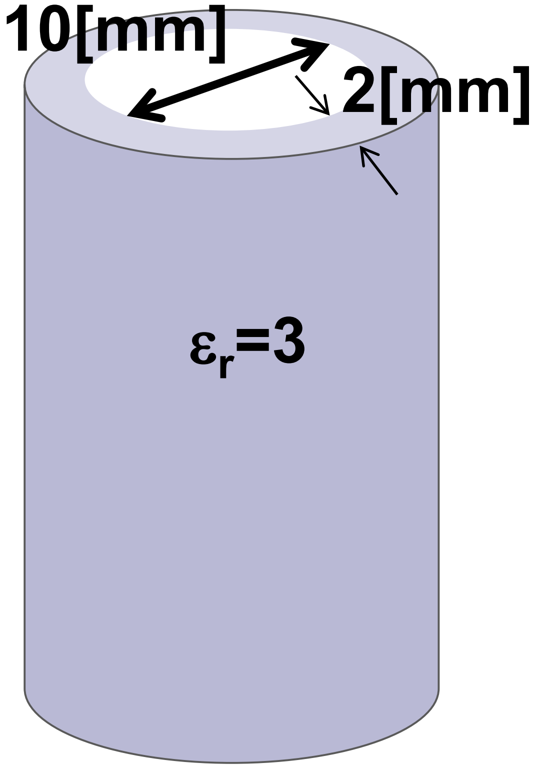
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}[F]$$

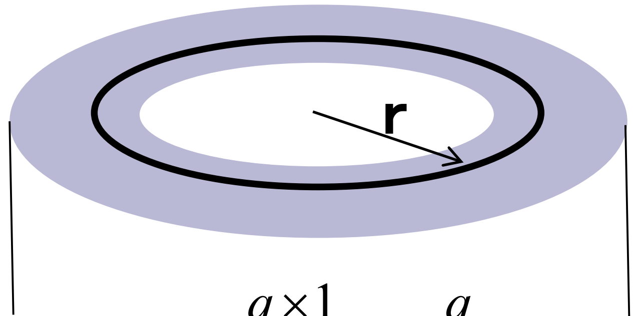
Q： (1) 比誘電率ε_rが1200、厚さ1.00[mm]の物質を、面積10.0[cm^2]の銅板2枚に挟んだ。静電容量を計算しなさい。真空の誘電率はε_0=8.85×10^{-12}[F/m]とする。
(2) 銅板にこの物質を挟む時、0.10[mm]の隙間ができた。静電容量はどうなるか?

(1) $$C=\varepsilon\frac{S}{d}=8.85\times10^{-12}\times1200\times\frac{10\times10^{-4}}{10^{-3}}=10.6[nF]$$

(2) $$C=\frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}=\frac{10\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}\times1200\times8.85\times10^{-12}}{10^{-3}\times8.85\times10^{-12}+0.1\times10^{-3}\times8.85\times10^{-12}\times1200}$$
$$=87.8[pF]$$

Q: 内径10[mm]、肉厚2[mm]の無限塩ビパイプの内面と外面をアルミニウムでコーティングした。1[m]あたり、内面及び外面に電荷をそれぞれ+q[C/m]、－q[C/m]を与えた時、単位長さ当たりの静電容量C[F/m]を求めなさい。塩ビの比誘電率を3、真空の誘電率を8.85×10^{-12} [F/m]として計算しなさい。





ガウスの法則

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q$$

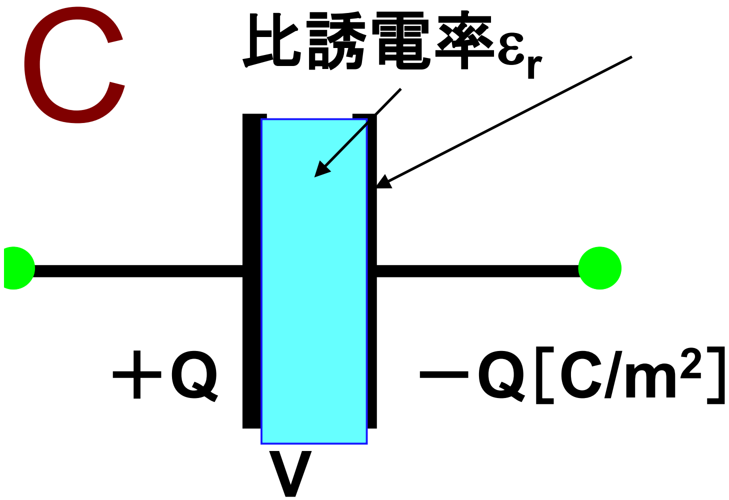
$$V = -\int_{\text{基準位置}}^{\text{対象となる位置}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$D = \frac{q\times 1}{2\pi r\times 1} = \frac{q}{2\pi r}$$

$$V = -\int_6^5 \frac{q}{2\pi\varepsilon r}dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln[\frac{6}{5}]$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln[\frac{6}{5}]} = \frac{2\times 3.14\times 8.85\times 10^{-12}\times 3}{\ln[\frac{6}{5}]} = 0.915[nF/m]$$

3.3 誘電体に蓄えられるエネルギー



単位面積当たりの電荷＋Q、－Q[C/m²]、
面積S[m²]、電極間距離d[m]とする。

誘電体がある場合の電極間の電界E[V/m]と
真空の場合の電界E_0は[V/m] は、

$$E = \frac{Q}{\boldsymbol{\varepsilon}_r \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \frac{E_0}{\boldsymbol{\varepsilon}_r} \Rightarrow V = \frac{E_0}{\boldsymbol{\varepsilon}_r} \cdot d$$

静電容量C[F]は、$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d}$

従って、静電エネルギーは $\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \left(\frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot d\right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0{}^2 \frac{1}{\varepsilon_r}$

真空中の単位体積当たりの静電エネルギーは $\dfrac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 [J/m^3]$

従って、比誘電率ε_rの誘電体に蓄えられるエネルギーは $\boxed{\dfrac{1}{\varepsilon_r}}$ に減少

3.4 誘電体の境界面に働く力

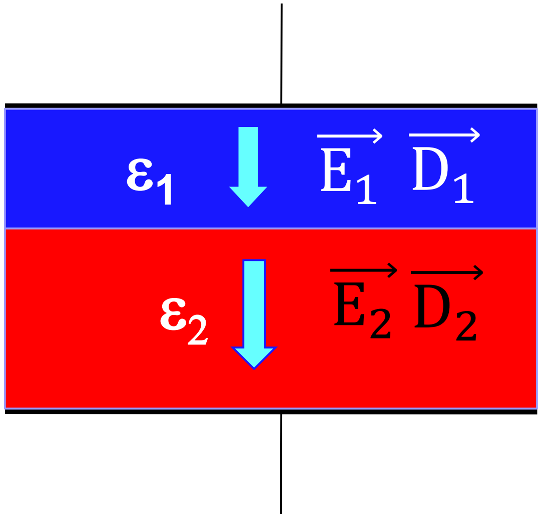
誘電体中にある点電荷Qが作る電界は
真空の誘電率ε_0を$\varepsilon_0\varepsilon_r$に置き換える。

r方向の単位ベクトル

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e_r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e_r}$$

電界が境界面に垂直の時

誘電体境界面上における電束密度D_2,D_1の法線成分は等しい。



界面が力を受けてδxだけ動いたとすると、
境界面単位面積当たりのエネルギーの変化は

$$\delta W=\frac{1}{2}\left(\vec{E_1}\cdot\vec{D_1}-\vec{E_2}\cdot\vec{D_2}\right)\delta x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)D^2\delta x$$

$$力F=-\frac{\delta W}{\delta x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)D^2$$

誘電率の大きい方が小さい方に引き込まれる

3.4 誘電体の境界面に働く力

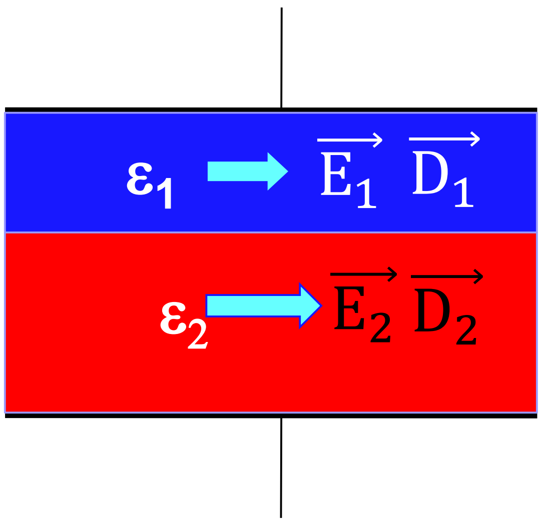
誘電体中にある点電荷Qが作る電界は
真空の誘電率ε_0を$\varepsilon_0\varepsilon_r$に置き換える。

r方向の単位ベクトル

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e_r}$$

電界が境界面に平行の時

二つの誘電体の界面における電界E_1,E_2の<u>接線</u>成分は等しい。



界面が力を受けてδxだけ動いたとすると、
境界面単位面積当たりのエネルギーの変化は

$$\delta W = \frac{1}{2}\left(\vec{E_1}\cdot\vec{D_1} - \vec{E_2}\cdot\vec{D_2}\right)\delta x$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E^2\delta x$$

$$\text{力}F = -\frac{\delta W}{\delta x} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E^2$$

誘電率の小さい方が大きい方に引き込まれる

3.5 真空中および誘電体中の基本式のまとめ

$$\oiint_S \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_k Q_k, \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_k Q_k$$

$$\oiint_S \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV, \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho, \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\varepsilon_r = 1 + (\varepsilon_r - 1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0\{1 + (\varepsilon_r - 1)\}\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}[C/m^2]$$

$$\nabla\cdot\nabla V = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla V)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla V)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla V)_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Δ: ラプラシアン

真空中は$\varepsilon=\varepsilon_0$, 誘電体中は$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$　(或いは真空中は$\varepsilon_r=1$)